Clareira
Revista de Filosofia da Região Amazônica

ISBN: 2359-1951

Relações de consequência simétrica

Hércules de Araújo FEITOSA[1]
Marcelo Reicher SOARES[2]
Ângela Pereira Rodrigues MOREIRA[3]

Resumo

Temos desenvolvido investigações sobre um conceito de lógica bastante universal em um contexto puramente conjuntista. Neste artigo, destacamos as relações de consequência simétrica como um caso particular e especial de relações de consequência com múltiplas conclusões. A motivação para esta abordagem dedutiva vem dos cálculos de sequentes de Gentzen, que associam um conjunto de sentenças a outro conjunto de sentenças, o antecedente e o consequente. De modo especial, sobre o conjunto antecedente, devemos imaginar uma conjunção de sentenças, enquanto que no conjunto consequente a ideação seria de uma disjunção. Por isto, Gentzen trabalhou com sequências finitas. Visto que tratamos com conjuntos quaisquer, então devemos reconhecer a validade de cada membro do antecedente e, de modo simétrico, de algum elemento do consequente. Mostramos que ainda assim temos sistemas dedutivos de Tarski.

Palavras-Chave: Operadores de Consequência, Relações de Consequência, Consequência com Múltiplas Conclusões, Consequência Simétrica.

Symmetric consequence relations

Abstract

We have developed investigations on a quite universal concept of logic in context purely set theoretic. In this article, we highlight the symmetric consequence relations as a particular and special case of consequence relations with multiple conclusions. The motivation for this approach comes from sequent calculus of Gentzen, which associates a set of sentences to another set of sentences, the antecedent and the consequent. In a special way, about the antecedent set we must consider a conjunction of sentences, while the consequent is formed by a disjunction. For this reason, Gentzen worked with finite sequences. Since we deal with any sets, then we must recognize the validity of each member of the antecedent and symmetrically of some member of the consequent. We show this case is still a deductive system of Tarski.

Key Words: Consequence Operators, Consequence Relations, Consequence with Multiple Conclusions, Symmetric Consequence.

1 UNESP - FC – Bauru. E-mail: haf@fc.unesp.br.
2 UNESP - FC – Bauru. E-mail: reicher@fc.unesp.br.
3 UNICAMP - IFCH – Campinas. E-mail: angela.p.rodrigues@bol.com.br.

Clareira
Revista de Filosofia da Região Amazônica
ISBN: 2359-1951

Introdução

O conceito de consequência lógica é central para o entendimento do que é lógica. Sabemos que as lógicas contemporâneas são construídas sobre linguagens artificiais particulares, que já portam entre seus entes constituintes aspectos essenciais das noções a serem formalizadas naquela lógica.

De um modo bem universal, por momento, deixamos a linguagem à parte e nos concentramos na noção de consequência apenas. Esta é uma abordagem com alguma tradição e escolhemos olhar apenas para a noção de consequência num ambiente puramente conjuntista.

Revisitamos o conceito de operador de consequência de Tarski que determina uma particular classe de lógicas, as lógicas de Tarski. O operador de Tarski leva um conjunto de fórmulas, as premissas, num outro conjunto de fórmulas, as conclusões, e gera um caso de consequência com múltiplas conclusões.

Na tradição de formalização da consequência lógica, também surge o conceito de relação de consequência, mas com uma conclusão a cada passo, que chamamos de consequência com conclusão unitária.

Nestes casos mencionados, todos os elementos do conjunto conclusão são deduzidos do conjunto de premissas.

Investigamos, neste artigo, o caso em que do conjunto das conclusões basta a validade de um elemento. Esta abordagem é uma generalização da noção de cálculo de sequentes de Gentzen e é chamado de consequência simétrica.

Inter-relacionamos estes conceitos e mostramos que toda consequência simétrica pode ser associada a um operador de Tarski embora a recíproca não se verifique.

ISBN: 2359-1951

Consequência simétrica

Relações de consequência simétrica têm sua motivação advinda dos cálculos de sequentes de Gentzen (1969). Elas são relações definidas sobre $\mathcal{P}$(E), em que E é um conjunto e $\mathcal{P}$(E) é o conjunto das partes de E.

Gentzen definiu seus sequentes iniciais sobre sequências finitas de fórmulas e na literatura, pouco depois, surgiu a apresentação dos sequentes sobre multiconjuntos finitos. Multiconjuntos generalizam o conceito usual de conjuntos ao admitir a repetição ou multiplicidade de elementos.

A nossa versão trata de conjuntos quaisquer, podendo inclusive ser conjuntos com infinitos elementos.

Definição 1.1: Uma relação $R \subseteq E{\times}E$ é *equipotente* e uma relação $R \subseteq \mathcal{P}(E){\times}E$ é *não-equipotente*.

Em alguns textos, as nossas relações equipotentes de consequência, são chamadas de simétricas e as não-equipotentes de assimétricas. Como não são nomes completamente estabelecidos e também usamos as expressões de relações simétricas e assimétricas para outros conceitos, então julgamos melhor não usar estes nomes.

Definição 1.2: Uma quase partição de um conjunto M é um par de conjuntos disjuntos (M_1, M_2), isto é, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ tal que $M_1 \cup M_2 = M$.

Uma possibilidade extrema de quase partição é para $(\varnothing, M)$, quando um dos subconjuntos da partição é o conjunto vazio.

Agora a definição de consequência simétrica pretendida, que é uma relação equipotente sobre $\mathcal{P}$(E), encontrada em (Dunn e Hardegree, 2001).

Definição 1.3: Sejam E um conjunto não vazio e $A{\cup}B{\cup}F{\cup}G{\cup}M \subseteq E$. Uma *relação de consequência simétrica* $\Vdash\ \subseteq \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ é determinada pelo seguinte:

(S_1) $A{\cap}B \neq \varnothing \Rightarrow A \Vdash B$

(S_2) $A \Vdash B \Rightarrow A{\cup}F \Vdash B{\cup}G$ (diluição)

ISBN: 2359-1951

(S_3) para todo conjunto M, se $A \nVdash B$, então existe uma quase partição (M_1, M_2) de M tal que $A\cup M_1 \nVdash B\cup M_2$ (corte global).

Vejamos algumas consequências simples desta definição.

Pela contrapositiva, a condição (S_1) é equivalente a $A \nVdash B \Rightarrow A\cap B = \varnothing$, isto é, se não há consequência de A para B, então os conjuntos são disjuntos. Mas, (S_1) não diz que se os conjuntos são disjuntos, então não há dedução entre eles. Por exemplo, consideremos a lógica proposicional clássica, e os conjuntos $A = \{p, p \rightarrow q\}$ e $B = \{p \wedge q\}$. Assim temos que $A\cap B = \varnothing$, $A \Vdash \{q\}$ e $B \Vdash \{q\}$ e, portanto, $A \Vdash B$.

A condição (S_1) garante ainda que $\{x\} \Vdash \{x\}$; $A \Vdash A$, desde que A seja não vazio; se $x \in A$, então $A \Vdash \{x\}$ e $\{x\} \Vdash A$. Porém, nada pode ser afirmado, até o momento, sobre $\varnothing \Vdash \varnothing$.

A condição (S_2) parece ser um pouco mais estranha, particularmente se $G \neq \varnothing$. Se há $A \Vdash B$, então parece razoável supor que $B \neq \varnothing$, pois do contrário, diante de (S_2), qualquer conjunto deduziria qualquer conjunto. Daí parece razoável que $\varnothing \nVdash \varnothing$. A simples união com F nos dá a monotonicidade usual, que nos garante o acréscimo de premissas. Agora a união de G nos remete a que se $A \Vdash \{x\}$, então $A \Vdash \{x\}\cup G$, para qualquer conjunto G, ou ainda, $A \Vdash \{b\}$, para algum $b \in B$, então $A \Vdash B$.

Apenas como está na definição, ainda não temos que $A \Vdash B \Rightarrow A \Vdash \{b\}$, para algum $b \in B$. Contudo, ao considerarmos que $B \neq \varnothing$, será possível demonstrar esse fato.

Proposição 1.4: O corte global (S_3) implica a seguinte versão do corte: $A \Vdash B\cup\{x\}$ e $A\cup\{x\} \Vdash B \Rightarrow A \Vdash B$ (corte).

Demonstração: A contrapositiva da regra do corte acima diz: $A \nVdash B \Rightarrow A \nVdash B\cup\{x\}$ ou $A\cup\{x\} \nVdash B$. Agora em (S_3), para $M = \{x\}$, se tomarmos a quase partição $M_1 = \{x\}$ e $M_2 = \varnothing$, teremos que $A \nVdash B \Rightarrow A\cup\{x\} \nVdash B$. ■

ISBN: 2359-1951

Corolário 1.5: A seguinte versão do corte: $A \Vdash B \cup C$ e $A \cup C \Vdash B \Rightarrow A \Vdash B$ (corte generalizado) também é consequência d corte global (S_3).

Demonstração: Se C é vazio, o resultado é imediato da hipótese. Agora, se C é não vazio, então o resultado segue como na demonstração da proposição anterior, quando x percorre cada elemento de C. ■

Teorema 1.6: Se $A \Vdash B$ e $B \neq \varnothing$, então $A \Vdash \{b\}$, para algum $b \in B$.

Demonstração: Se $B \neq \varnothing$, então há $b \in B$ e, por (S_1), $B \Vdash \{b\}$. De $A \Vdash B$ e $B \Vdash \{b\}$, pela diluição, temos que $A \Vdash \{b\} \cup B$ e $A \cup B \Vdash \{b\}$ e daí, pelo corte, que $A \Vdash \{b\}$. ■

Assim, temos que entender esta consequência $\Vdash$ do seguinte modo:

$A \Vdash B$, com $B \neq \varnothing \Leftrightarrow A \Vdash \{b\}$, para algum $b \in B$.

Operadores de Tarski

A nossa versão do operador de consequência de Tarski é a seguinte.

Definição 2.1: Um *operador de consequência* sobre E é uma função $\mathsf{C}: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ tal que, para todos $A, B \subseteq E$:

(C_1) $A \subseteq \mathsf{C}(A)$ [autodedutibilidade]

(C_2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(B)$ [monotonicidade]

(C_3) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \subseteq \mathsf{C}(A)$ [idempotência].

Para todo operador de consequência C, por (C_1) e (C_3), vale a igualdade $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) = \mathsf{C}(A)$.

Definição 2.2: Um operador de consequência C sobre E é *finitário* quando, para todo $A \subseteq E$:

(C_4) $\mathsf{C}(A) = \cup\{\mathsf{C}(A_f) : A_f$ é subconjunto finito de $A\}$.

Definição 2.3: *Espaço de Tarski* (*sistema dedutivo*, *espaço de fecho*, *lógica*) é um par (E, C), em que E é um conjunto qualquer e C é um operador de consequência sobre E.

ISBN: 2359-1951

Definição 2.4: Seja C um operador de consequência sobre E, o conjunto A é *fechado* em (E, C) quando $\mathsf{C}(A) = A$, e A é *aberto* quando o complementar de A, denotado por A^C, é fechado em (E, C).

Proposição 2.5: Se (E, C) é um espaço de Tarski, então o domínio E é fechado, o conjunto $\varnothing$ é aberto e para todo $A \subseteq E$, o conjunto $\mathsf{C}(A)$ é fechado. ■

Para uma ponte entre o operador de consequência de Tarski e as relações de consequência simétricas, usamos a seguinte relação de equivalência:

$$A \Vdash B \Leftrightarrow B \subseteq \mathsf{C}(A).$$

Diante disso, mostramos que se (E, $\Vdash$) é uma relação de consequência simétrica, então ao tomarmos a equivalência $A \Vdash B \Leftrightarrow B \subseteq \mathsf{C}(A)$, verificamos que (E, C) é um espaço de Tarski, contudo a recíproca não vale, pois podemos definir um espaço (E, C) para o qual ao tomarmos a equivalência acima, não obtemos uma relação de consequência simétrica como na Definição 1.3.

Relações simétricas e sistemas de Tarski

Agora, mostramos que embora com concepção um pouco não usual, também as relações de consequência simétrica são sistemas de Tarski.

Proposição 3.1: Se (E, $\Vdash$) é relação de consequência simétrica e tomamos $A \Vdash B \Leftrightarrow B \subseteq \mathsf{C}(A)$, então (E, C) é um espaço de Tarski.

Demonstração: (C_1) Se $A \neq \varnothing$, então $A \cap A \neq \varnothing$ e, por (S_1), $A \Vdash A$ e, pela equivalência do enunciado, $A \subseteq \mathsf{C}(A)$.

(C_2) Se $A \subseteq B$ e $y \in \mathsf{C}(A)$, então $\{y\} \subseteq \mathsf{C}(A)$ e $A \Vdash \{y\}$. Por (S_2), para F = B e G = $\varnothing$, temos $A \cup B \Vdash \{y\}$. Assim, $\{y\} \subseteq \mathsf{C}(A \cup B) = \mathsf{C}(B)$ e, portanto, $y \in \mathsf{C}(B)$.

(C_3) Se $y \in \mathsf{C}(\mathsf{C}(A))$, então $\{y\} \subseteq \mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \Leftrightarrow \mathsf{C}(A) \Vdash \{y\}$. Agora, para todo z, $z \in \mathsf{C}(A) \Leftrightarrow \{z\} \subseteq \mathsf{C}(A) \Leftrightarrow A \Vdash \{z\}$. Daí, para todo $z \in E$, $A \Vdash \{z\} \cup \{y\}$ e $A \cup \{z\} = \mathsf{C}(A) \Vdash \{y\}$. Por ($S_3$), $A \Vdash \{y\}$ e, portanto, $y \in \mathsf{C}(A)$. ■

Porém, não vale a recíproca.

ISBN: 2359-1951

Proposição 3.2: Nem todo sistema de Tarski determina uma relação simétrica.

Demonstração: Sejam $E = \{a, b\}$ e sobre E definimos um operador de Tarski do seguinte modo: $C(\{a\}) = \{a\}$, $C(\{b\}) = \{b\}$, $C(\{a, b\}) = \{a, b\}$ e $C(\varnothing) = \varnothing$. Ao dizermos quem são os fechados sobre E, temos um espaço de Tarski (E, C).

Contudo, se considerarmos uma relação sobre E dada por $A \Vdash B \Leftrightarrow B \subseteq C(A)$, como na proposição anterior, temos que $\{a\} \Vdash \{a\}$, mas não é o caso que $\{a\} \Vdash \{a, b\}$. Logo, não vale (S_2) ao tomarmos $A = B = \{a\}$, $F = \varnothing$ e $G = \{b\}$ e, portanto, a relação $\Vdash$ não é simétrica conforme da Definição 1.3. ■

Portanto, o conceito de relação simétrica difere do conceito de operador de Tarski, bem como do de uma relação de consequência com múltiplas conclusões, como veremos a seguir. Todavia, fazendo uma associação apropriada, observamos que o conceito de relação simétrica pode ser visto como um caso particular do conceito de operador de Tarski.

Relações de consequência de múltiplas conclusões

Em (Feitosa, Moreira e Soares, 2016b) introduzimos uma definição de relação de consequência com múltiplas consequências, como abaixo, a qual mostramos ser também um sistema de Tarski.

Definição 4.1: Seja E um conjunto não vazio. Dados $A \cup B \cup C \subseteq E$, definimos uma *relação de consequência com múltiplas conclusões* $\Vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ por:

(R_1) $A \Vdash A$

(R_2) $A \Vdash C \Rightarrow A \cup B \Vdash C$

(R_3) $A \Vdash C$ e $A \cup C \Vdash B \Rightarrow A \Vdash B$.

A condição (R_3) deve ser entendida como um corte generalizado, pois elimina o conjunto C. Esta condição (R_3) implica a condição (R_4), abaixo, que é o corte ponto a ponto:

ISBN: 2359-1951

(R_4) $A \Vdash \{x\}$ e $A \cup \{x\} \Vdash B \Rightarrow A \Vdash B$.

Além disso, a condição (R_3) mais a monotonicidade (R_2) garantem uma transitividade dedutiva entre conjuntos.

Se $(E, \Vdash)$ determina uma relação de consequência como acima, então verificamos que:

$$A \Vdash B \Leftrightarrow A \Vdash \{b\}, \text{ para todo } b \in B.$$

Os resultados abaixo são facilmente demonstrados a partir da Definição 4.1.

Proposição 4.2: Se $A \Vdash B$ e $B \Vdash C$, então $A \Vdash C$.

Proposição 4.3: Se $A \subseteq B$, então $B \Vdash A$.

Proposição 4.4: Sejam $(E, \Vdash)$ uma consequência com múltiplas conclusões e $(E, \VDash)$ uma consequência simétrica. Para $A \cup B \subseteq E$, se $A \Vdash B$, então $A \VDash B$.

Demonstração: Como a relação $\Vdash$ vale para todo $b \in B$, se $B \neq \varnothing$, então ela satisfaz também a relação $\VDash$. ■

No caso em que $B = \{x\}$ é um conjunto unitário, os dois casos colapsam.

Proposição 4.5: Sejam $(E, \Vdash)$ uma relação de consequência com múltiplas conclusões e $(E, \VDash)$ uma consequência simétrica. Para $A \cup B \subseteq E$, $A \VDash B$ não implica que $A \Vdash B$.

Demonstração: Consideremos um $y \in E$ tal que $A \cup F \nVDash \{y\}$. Assim, se $A \VDash B$, então $A \cup F \VDash B \cup \{y\}$, contudo, $A \cup F \nVDash B \cup \{y\}$. ■

Como já havíamos verificado em (Feitosa, Moreira, Soares, 2016), dada uma relação de consequência com múltiplas conclusões, podemos determinar para ela um espaço de Tarski (E, C) e vice-versa.

ISBN: 2359-1951

A Proposição 4.5 tem semelhança com a Proposição 3.2, em que temos os sistemas de Tarski ou de múltiplas conclusões, mas eles apenas não garantem uma relação de consequência simétrica, nos dois casos, devido à propriedade de diluição.

Considerações finais

Como já vimos, sempre podemos passar de uma relação de consequência com conclusão única para uma relação de consequência com múltiplas conclusões e vice-versa. Nestes casos, todas as conclusões têm que ser válidas segundo a respectiva relação. Verificamos também que estas relações são casos de sistemas de Tarski.

Neste trabalho mostramos que toda relação simétrica produz um sistema de Tarski, contudo, um sistema de Tarski não garante a propriedade da diluição, como apresentada neste artigo.

Importante é observar que temos diferentes maneiras de caracterizar as noções lógicas, mesmo sem levarmos em conta as linguagens subjacentes, atendo-nos às noções de consequência. As consequências simétricas variam um pouco quanto a incluir nas conclusões não obtidas no processo de consequência, contudo exige que algum elemento esteja na consequência, para só depois admitir quaisquer. Porém, algum tem que jogar o papel de validar a consequência e, então, os demais seriam supérfluos.

Continuamos instigados a desenvolver investigações sobre a noção bastante geral de consequência lógica, também para sistemas não Tarskianos, e pela inclusão de outros entes lógicos que precisem ou não de noções de linguagem.

Também gostaríamos de tratar de aspectos da consequência que não seja apenas a consequência dedutiva e sempre buscar noções gerais que permitam algo de fundamentação da consequência (lógica).

ISBN: 2359-1951

Referências

BEZIAU, J-Y. Universal logic. In: T. CHILDERS; O. MAJER (Eds.). *Proceedings of the 8th International Colloquium - Logica'94*. Prague: Czech Academy of Sciences, p. 73-93, 2004.

BEZIAU, J-Y. From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic. In: BEZIAU, J-Y. (Ed.) *Logica universalis*, p. 3-19, 2007.

DUNN, J. M.; HARDEGREE, G. M. *Algebraic methods in philosophical logic*. Oxford: Oxford University Press, 2001.

FEITOSA, H. A.; MOREIRA, A. P. R.; SOARES, M. R *Operadores de consequência e relações de consequência*. (a aparecer), 2016a.

FEITOSA, H. A.; MOREIRA, A. P. R.; SOARES, M. R *Sobre relações de consequência com múltiplas conclusões*. (a aparecer), 2016b.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; SILVESTRINI, L. H. C. Confrontando propriedades lógicas em um contexto de lógica universal. *Cognitio: Revista de Filosofia*, v. 15, n. 2, p. 333-347, 2014.

FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. A survey of abstract algebraic logic. *Studia Logica*, v. 74, p. 13 - 97, 2003.

GENTZEN, G. Investigation into logical deduction. In: SZABO M. E. (Ed.) *The collected papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, p. 68-131, 1969.

MARTIN, N. M.; POLLARD, S. *Closure spaces and logic*. Dordrecht: Kluwer, 1996.

SUNDHOLM, G. Systems of deduction. In GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Eds.) *Handbook of Philosophical Logic*. Dordrecht: Reidel, v. 1, p. 133-188, 1983.

TARSKI, A. *Logic, semantics, metamathematics*. 2. ed. CORCORAN, J. (Ed.). Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983.