Edição especial:
II Simpósio Integrado UNIR | Ji-Paraná

Artigo

Construção dos Retângulos de Ouro e Prata usando o Geogebra

Construction of Gold and SilverrRectangles using Geogebra

Deverson Ferreira Cardoso[1*], Marcio Costa Araújo Filho[2]

[1] Universidade Federal de Rondônia/ Departamento de Matemática e Estatística -Ji-Paraná
[2] Universidade Federal de Rondônia/ Departamento de Matemática e Estatística -Ji-Paraná – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5344-0892
* Correspondência: deversonf74@gmail.com

Citação: Cardoso, D. F.; Araújo Filho, M. C. Construção dos Retângulos de Ouro e Prata usando o Geogebra. *RBCA* **2024**, *13*, 3. p.112-122.

Editor de Seção: Dra. Karen Janones da Rocha
Recebido: 11/07/2024
Aceito: 17/08/2024
Publicado: 02/09/2024

Nota do editor: A RBCA permanece neutra em relação às reivindicações jurisdicionais em sites publicados e afiliações institucionais.

Abstract: In this paper, we present the family of metallic numbers, which is a class of numbers that includes the golden ratio, and we deeply study two elements of this family: the golden and silver numbers, with a geometric focus. This research is bibliographic in nature and relies on the deductive method, which is commonly used in Mathematics studies. It is the result of the Institutional Project of Scholarships in Scientific Initiation at the Federal University of Rondônia (UNIR), where the first author works as a volunteer scholar under the guidance of the second author. The main distinctive feature of this work is the use of the online tool GeoGebra for constructing the golden and silver rectangles, as well as presenting a step-by-step guide for constructing the silver rectangle using GeoGebra.

Keywords: Metallic numbers; Gold and Silver numbers; Geometric constructions.

Resumo: Neste artigo, apresentamos a família dos números metálicos, que é uma classe de números que contém como primeiro membro o número de ouro, e estudamos de forma aprofundada dois elementos dessa família: os números de ouro e de prata, com um enfoque geométrico. A presente pesquisa é de cunho bibliográfico e apoia-se no método dedutivo, que é comumente utilizado em trabalhos de Matemática. Esta pesquisa é resultado do Projeto Institucional de Bolsas em Iniciação Científica da Universidade Federal de Rondônia (UNIR), no qual o primeiro autor atua como bolsista voluntário sob a orientação do segundo autor. O principal diferencial deste trabalho é a utilização da ferramenta *online* GeoGebra para a construção dos retângulos de ouro e de prata, bem como a apresentação do passo a passo para a construção do retângulo de prata utilizando o GeoGebra.

Palavras-chave: Números metálicos; Números de ouro e de prata; Construções Geométricas.

1. Introdução

Este trabalho discursará os números metálicos, que são uma concepção de Vera Martha Winitzky de Spinadel (2003), que toma como referência o número de ouro (φ), que é o membro mais conhecido e também o primeiro desta família a ser descoberto, com o seu primeiro registro encontrado em "Os elementos de Euclides volume VI" (Biembengut, p. 53, 2000). Esta pesquisa é de natureza bibliográfica, apoiada pelo método dedutivo, geralmente utilizado em trabalhos de Matemática, e decorrente do Projeto Institucional de Bolsas em Iniciação Científica da UNIR, intitulado *Números Metálicos*, no qual o primeiro autor atua como bolsista voluntário, sob a orientação do segundo autor.

A fim de descrevermos os números metálicos, começaremos nossa motivação inicial estudando o número de ouro (φ) por meio da equação que o define. Para isso, consideremos a seguinte equação quadrática:

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \text{equação (1)}$$

cuja solução positiva é o número de ouro ou razão áurea, ou seja, podemos obter o número de ouro resolvendo a Equação (1), para isso pode-se usar o método de completar quadrados, vejamos:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2\frac{x}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Logo, a solução positiva da Equação (1) é o número $\varphi = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ que é o número de ouro, para mais detalhes sobre o número de ouro o leitor pode consultar Ávila(1985), Biembengut(2000), Ramos(2013), entre outros.

Nesse sentido, os números metálicos, assim como o número de ouro, são soluções positivas de uma equação quadrática, a saber:

$$x^2 - px - q = 0 \qquad \text{equação (2)}$$

com p e q números naturais quaisquer. Se p = q = 1 a equação anterior se torna a equação do número de ouro e quando p = 2 e q = 1 obtém-se a equação que tem como solução positiva o número de prata, nomenclatura conforme DE ESPINADEL (2003).

Neste trabalho, apesar de apresentarmos os números metálicos para q = 1 (caso no qual faremos a representação por frações contínuas), iremos nos aprofundar nos números de ouro e de prata. Na verdade, estaremos interessados nas construções geométricas referentes a esses dois números, ou seja, à construções relacionadas aos números de prata e ouro utilizando-se régua e compasso como eram feitas as construções geométricas nos primórdios da geometria. Porém, atualmente existem muitos softwares computacionais, aplicativos e sites que proporcionam precisão e facilidade para construções geométricas, pois possuem uma gama de recursos a serem utilizados, um exemplo é o GeoGebra, que é um aplicativo livre e utilizado no estudo de Geometria e Álgebra e pode ser usado tanto online como baixado no computador, ele será apresentado e utilizado, no lugar da régua e compasso tradicionais, no decorrer deste trabalho para as construções geométricas relacionadas aos números de ouro e de prata, para mais detalhes do GeoGebra ver Seção 5.

O presente artigo começa com uma motivação acerca do surgimento da sequência de Fibonacci e sua relação com o número de ouro na Seção 2. Em seguida, discorre-se um pouco sobre os números metálicos e suas representações em forma de frações contínuas na Seção 3, finalizamos essa seção com a definição da razão de prata. Já na Seção 4, nos dedicamos à construção dos retângulos de ouro e de prata. E por fim, na Seção 5 é apresentado um passo a passo para a construção do retângulo de prata utilizando-se o GeoGebra online.

2. Materiais e Métodos

2.1 O número de ouro e a sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é parte do trabalho de Leonardo de Pisa (1170 – 1240) ou como era conhecido Fibonacci, de onde surgiu o nome de sequência de Fibonacci, que aparece em seu primeiro livro publicado "Liber Abaci". No capítulo 12 do livro "Liber Abaci" é relatado o problema que veremos a seguir.

> Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? No 1o mês, temos apenas um par de coelhos (ainda filhotes). No 2o mês, continuamos com um par de coelhos (agora adultos). No 3o mês, nasce um par de filhotes. Logo, temos dois pares de coelhos (um par de adultos e um par de filhotes). No 4o mês, o par inicial gera o seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes). No 5o mês, o par inicial gera o seu terceiro par de filhotes; o segundo par de adultos gera o seu primeiro par de filhotes e o par de filhotes gerado no mês anterior, agora adulto. Logo, temos cinco pares de coelhos (três pares de adultos mais dois pares de filhotes). e assim por diante. . . (Fibonacci, apud RAMOS, p. 5-6 2013).

Assim percebe-se que a cada mês o número de casais de coelhos é igual a soma de casais de coelhos dos dois meses anteriores, ou seja, mensalmente teremos a seguinte quantidade de pares de coelhos: 1,1,2,3,5,.... Tal sequência será definida formalmente a seguir.

Definição 1 *A sequência* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definida pela recorrência* $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ *sendo* $F_1 = F_2 = 1$ *é conhecida como sequência de Fibonacci. De forma explícita os termos são:*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...$$

A partir da sequência de Fibonacci podemos construir uma nova sequência dada pela razão de seus termos, que é a seguinte: $\frac{F_{n+1}}{F_n}$. É possível verificar que tal sequência vai convergir para o número de ouro φ (Ávila, 1985). Vejamos a seguir como é possível determinar esse limite:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \Rightarrow \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \Rightarrow \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

suponhamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = x$, aplicando o limite na última igualdade acima obtemos x = 1+ $\frac{1}{x}$ que é equivalente à Equação (1). Como os termos da sequência $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ são positivos, seu limite também deve ser, com isso garantimos que o esse limite deve ser o número ouro φ. uma vez que ele é a única raiz positiva da Equação (1).

O número de ouro aparece de forma natural também na geometria, um dos casos é quando se pretende dividir um segmento em média e extrema razão, que definiremos a seguir. Diz-se que um ponto C de um segmento AB (Figura 1) divide este segmento em media e extrema razão se

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Figura 1. Razão de ouro. **Fonte:** Autores (2023).

Assim tomando AC = a, CB = b e AB = a+b como AB AC = AC CB temos que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Longrightarrow a^2 = ab + b^2 \Longrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

O que mostra que a razão a b satisfaz à equação (1) cuja raiz positiva é igual ao número de Ouro φ, por esse motivo a razão dizemos que o ponto c divide o segmento AB na razão áurea.

2.2 *Números metálicos e suas formações*

De acordo com Spinadel (2003), os números metálicos são definidos como as soluções positivas da equação x 2 − px−q = 0, com p e q números naturais, na qual o primeiro número dessa família é o número de ouro φ que é obtido quando p = q = 1. Para os objetivos deste trabalho, substituiremos na equação quadrática $x^2 - px - q = 0$, p por n e q por 1, desta forma obtemos a equação particular $x^2 - nx - 1 = 0$ sendo n ∈ N, que nos fornece uma quantidade infinita de membros da família dos números metálicos, resolvendo essa equação quadrática temos

$$x = \frac{-(-n) \pm \sqrt{(-n)^2 - 4.1(-1)}}{2}$$

e considerando apenas a raiz positiva teremos $x = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$

Essa última igualdade nos mostra que existe uma classe de números metálicos irracionais que contém o número de ouro φ. A seguir veremos que os números gerados por esta equação são irracionais. Observemos que n 2 + 4, com n ∈ N, não pode ser um quadrado perfeito, provaremos isso utilizando-se o método de redução ao absurdo. De fato, suponhamos que exista um k ∈ N, tal que n 2 + 4 = k 2 , então k > n e k 2 − n 2 = 4 ⇒ (k + n)(k − n) = 4. O número 4 pode ser decomposto de duas maneiras como um produto de números naturais, a saber, 4 = 4·1 e 4 = 2·2 sendo assim temos duas possibilidades.

1° caso: k +n = 4 e k −n = 1 ou seja k = 4−n e k = n+1, então n+1 = 4−n ⇒ 2n = 3 ⇒ n = 3/2 o que um absurdo já que n ∈ N.
2° caso: k +n = 2 e k −n = 2 então k = 2−n e k = 2+n sendo 2−n = 2+n ⇒ 2n = 0 ⇒ n = 0/2 ⇒ n = 0 sendo um absurdo.

Logo conclui-se que a expressão $n^2 + 4$ não é um quadrado perfeito para todo n ∈ N e consequentemente os números da forma $\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ são irracionais.

2.2.1 Representação dos números de ouro, prata e bronze através de frações contínuas

Da equação geral $x^2 - nx - 1 = 0$ temos que $x^2 = nx+1$, dividindo os dois lados dessa igualdade por x vem que $x^2/x = (nx+1)/x$ consequentemente $x = n + \frac{1}{x}$ assim caímos na seguinte recorrência:

$$x = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + ..}}$$

que é uma fração contínua, ou seja, os números metálicos podem ser vistos também como frações contínuas, para mais detalhes a respeito das frações contínuas e números metálicos o leitor pode consultar (ARAÚJO, 2015).

Sendo assim, para cada n ∈ N a recorrência gerará um número metálico. Para n = 1 essa fração nós dará o número de ouro φ, já para n = 2 obteremos o número de prata (que denotaremos por σ) e assim sucessivamente para n = 3 teremos o número de Bronze (que denotaremos por ϖ), nos quais os dois primeiros serão abordados no decorrer deste trabalho, sendo assim,

$$\phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+..}},\ \sigma = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+..}} \text{ e } \varpi = 3 + \frac{1}{3+\frac{1}{3+..}}$$

são as representações dos números de ouro, prata e bronze, respectivamente, em frações contínuas.

2.2.2 Números de prata

O número de prata ou razão de prata pode ser visto de diversas formas na arte e até mesmo na estética de coisas de nosso cotidiano, estando presente na forma das folhas de papel A4 e nas artes e arquitetura orientais.

Pode-se calcular o valor do número de prata pela seguinte equação demonstrada anteriormente.

$$\frac{1}{2}(n + \sqrt{n^2 + 4})$$

Sendo assim, fazendo n = 2 obtemos o número de prata, ou seja,

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{2^2 + 4}\right) = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \cong 2{,}4142...$$

Logo, o número de prata é σ = $1 + \sqrt{2}$ que com quatro casas decimais pode ser aproximado como 2,4142.... Assim como a razão de ouro, a razão de prata pode ser vista de forma natural na geometria. Dizemos que os pontos C e D dividem um segmento AB na razão de prata (Figura 2)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Figura 2. Razão de prata. **Fonte:** Autores (2023).

3. Resultados e Discussão

A seguir descrevemos as construções geométricas das razões de ouro e de prata. De acordo com Wagner (2009), as construções geométricas surgiram na Grécia antiga e continuam até aos dias atuais a terem muita importância na compreensão da geometria. As construções geométricas são feitas com a utilização apenas de régua não graduada e compasso sendo útil na resolução e compreensão de conceitos e problemas geométricos e algébricos.

> Nas construções geométricas são permitidos apenas a régua (não graduada) e o compasso. A régua serve apenas para desenhar uma reta passando por dois pontos dados e o compasso serve apenas para desenhar uma circunferência cujo raio é dado por um segmento e cujo centro é um ponto dado (WAGNER, 2009, p. 3).

Nos dias de hoje a régua e o compasso podem ser substituídos muitas das vezes por um dispositivo eletrônico, como o computador no qual com o auxílio de algumas ferramentas específicas podem ser realizadas diversas construções geométricas. Para realizar as construções geométricas dos retângulos de ouro e prata que veremos a seguir utilizaremos o Software livre 8 "GeoGebra" que é um aplicativo livre e utilizado no estudo de Geometria e Álgebra, e que pode ser acessado também online.

3.1 Construção do retângulo de ouro

Dizemos que um retângulo é de ouro ou está na razão de ouro ou razão áurea quando dividindo ele em um quadrado e um retângulo menor o retângulo original é semelhante ao retângulo menor, como podemos ver na Figura 3 a seguir em que o retângulo (A,G,H,D) é semelhante ao retângulo (B,G,H,C), ou seja, a seguinte razão tem que valer: $\frac{AG}{GH} = \frac{GH}{HC}$.

Para construir o retângulo de ouro iniciamos construindo o quadrado ABCD e tomamos no lado AB o ponto F que o está dividindo ao meio conforme a Figura 3. Com origem no ponto F construímos o arco de circunferência d que tem seus extremos nos pontos ponto C e G marcado na extensão do lado AB. Uma vez obtido o ponto G determina-se o ponto H que é a interseção do prolongamento de DC com o segmento GH perpendicular ao segmento BG. Finalmente, os pontos G e H obtidos juntamente com os pontos A e B iniciais determinam o retângulo ADHG que é um retângulo de ouro, conforme a Figura 3 abaixo.

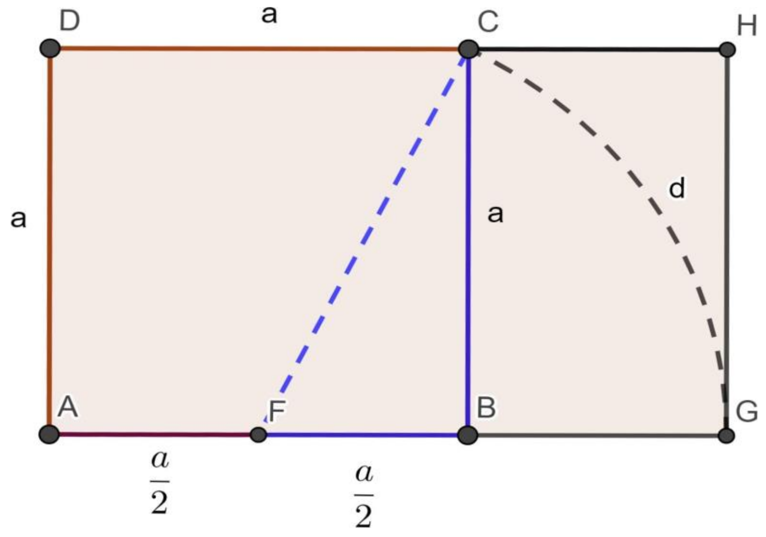

Figura 3. Retângulo de ouro. **Fonte:** Autores (2023).

Utilizando a Figura 3 é possível justificar a construção do retângulo de ouro feita acima.

De fato, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ΔFBC temos que:

$(FC)^2 = (CB)^2 + (FB)^2 \Rightarrow (FC)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow FC = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \Rightarrow FC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Como FC = FG e o segmento AG = AF +FG, temos que

$AG = AF + FG \Rightarrow AG = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

e, portanto, dividindo o segmento AG pelo segmento AD, obtemos

$$\frac{AG}{AD} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}}{a} \Rightarrow \frac{AG}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

e isso mostra que o retângulo ADHG é realmente um retângulo de ouro. Além disso, pela construção feita o ponto B divide o lado AG na razão de ouro.

3.2 Construção do retângulo de prata

Dizemos que um retângulo é um retângulo de prata quando a razão entre dois de seus lados adjacentes for a razão de prata. Equivalentemente, um retângulo será de prata quando existirem dois quadrados e um retângulo pequeno formando esse retângulo maior de modo que o retângulo maior seja semelhante ao retângulo menor, como podemos ver na Figura 4, o retângulo (A,H,I,D) será de prata se ele for semelhante ao retângulo (E,H,I,F), ou seja, se a razão $\frac{AH}{HI} = \frac{HI}{IF}$ for válida.

A Figura 4 mostra um retângulo de prata que construímos com o auxílio do GeoGebra. Para construir esse retângulo, começamos construindo os quadrados (A,B,G,D) e

(B,E,F,G) que formam o retângulo (A,E,F,G) em que o ponto B está dividindo o segmento de reta AE ao meio. Com origem no ponto B é construído o arco de circunferência d que tem seus extremos nos pontos F e H. De posse do ponto H constrói-se o ponto I que é o encontro dos segmentos perpendiculares FI e HI, sendo assim traça-se o retângulo (A,D,I,H) que é um retângulo de prata.

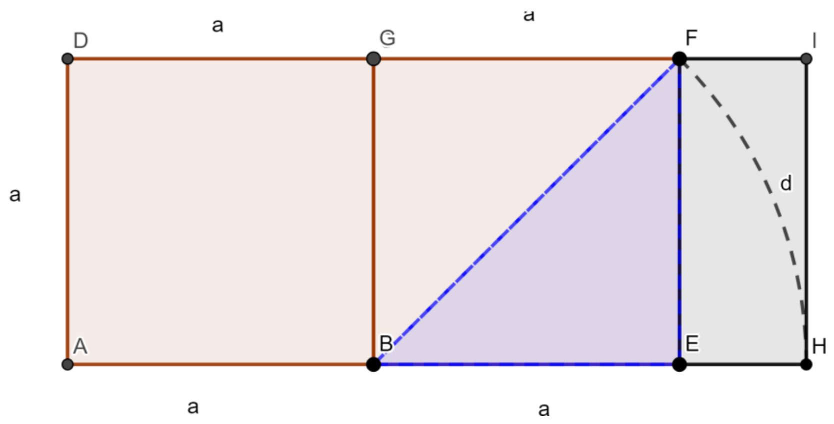

Figura 4. Retângulo de prata. **Fonte:** Autores (2023).

Vejamos no que segue, que realmente os lados do retângulo (A,D,I,H) estão na razão de prata. A partir do teorema de Pitágoras aplicado no triângulo ΔBEF temos que:

$$(BF)^2 = (EF)^2 + (EB)^2 \Rightarrow (BF)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow BF = \sqrt{2a^2} \Rightarrow BF = a\sqrt{2}.$$

Sabendo que BF é igual a BH e sabendo que o segmento AH é igual a soma de AB com BH, ou seja, AH = AB+BH = $a + a\sqrt{2}$ e fazendo a razão da base do retângulo (A,D,I,H) pela sua altura obtemos:

$$\frac{AH}{AD} = \frac{a + a\sqrt{2}}{a} = 1 + \sqrt{2} = \sigma$$

que é o que queríamos verificar, gostaríamos de ressaltar ainda que com a construção feita na Figura 4, os pontos B e E dividem o segmento AH na razão de prata.

3.3 *Passo a passo para construção do retângulo de prata no GeoGebra*

Com a ferramenta GeoGebra, tanto o software quanto online, é possível fazer construções geométricas como os retângulos de prata e ouro. Então visando melhor compreensão por parte do leitor de como são feitas estas construções, nesta seção será apresentado o passo a passo da construção do retângulo de prata utilizando-se o GeoGebra online na versão "Classic".

Para construir o retângulo de prata no GeoGebra primeiro seleciona-se a opção polígono regular na barra de navegação.

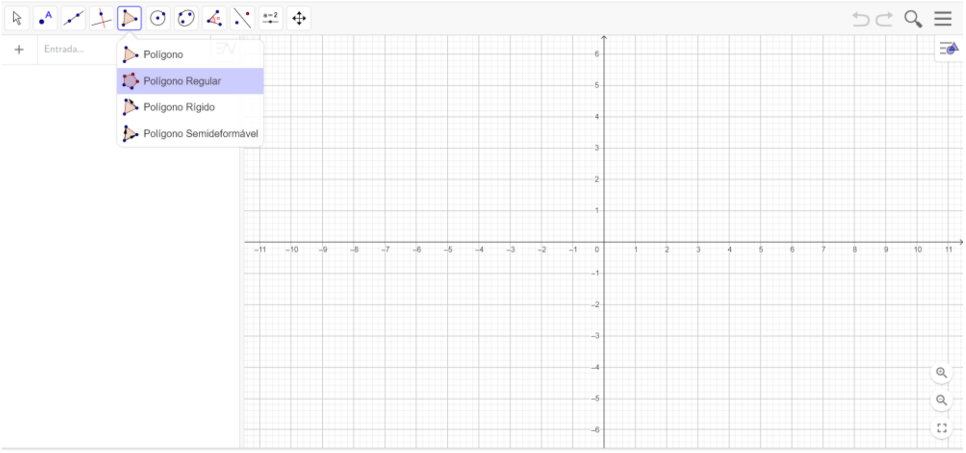

Figura 5. Retângulo de prata,passo 1. **Fonte:** Autores (2023).

Em seguida selecione dois pontos sobre o plano cartesiano, confirme um polígono regular com 4 vértices com isso será plotado um quadrado.

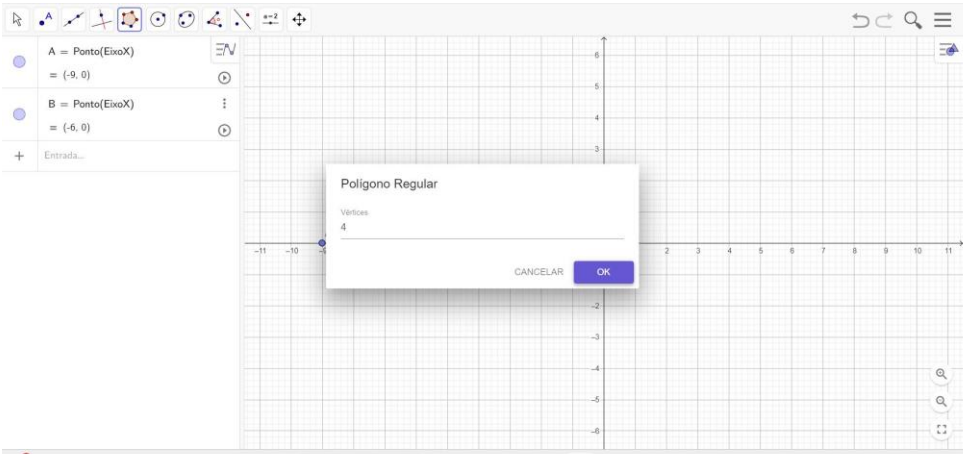

Figura 6. Retângulo de prata,passo 2. **Fonte:** Autores (2023).

Repita o processo utilizando os pontos da lateral do primeiro quadrado para construir um segundo quadrado ao lado do primeiro, veja a Figura 7.

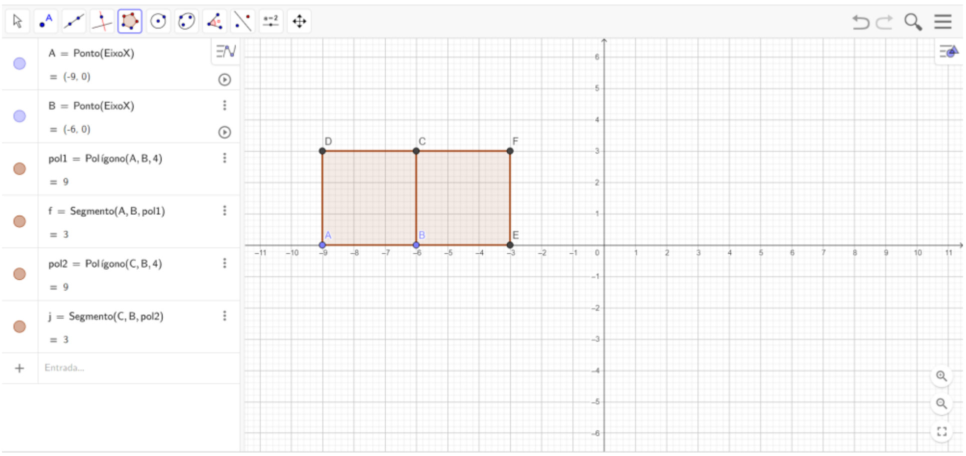

Figura 7. Retângulo de prata,passo 3. **Fonte:** Autores (2023).

Tendo feito os dois quadrados a saber (A,B,C,D) e (B,E,F,C), conforme Figura 7, com a ferramenta compasso faz-se um círculo de centro B e raio BF, com isso obtemos o ponto de intersecção G do círculo com o eixo x. Em seguida, traça-se a reta DF e uma perpendicular que passe por esta reta e o ponto G, obtendo assim o ponto H de interseção dessas duas retas. Com a ferramenta segmento de reta ligue os pontos F ao H, H ao G e G ao E, obtendo o retângulo de prata (AGHD) da Figura 8.

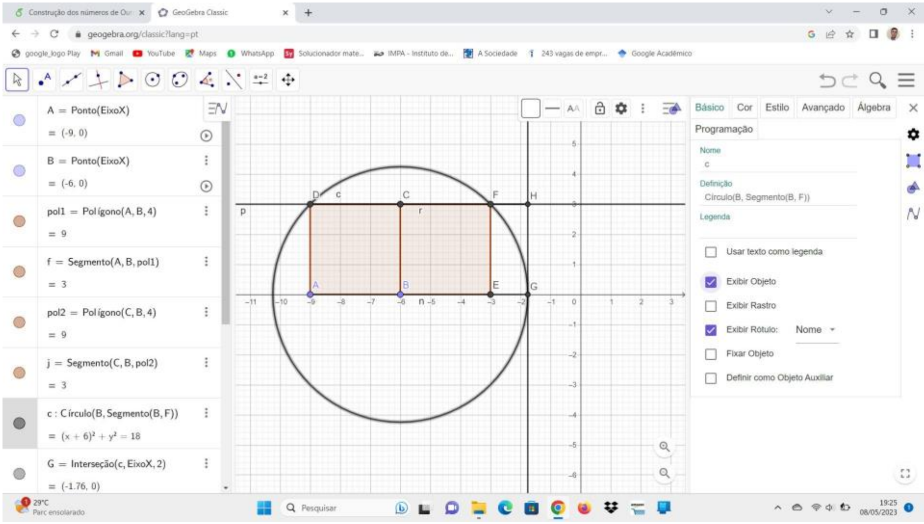

Figura 8. Retângulo de prata,passo 4. **Fonte:** Autores (2023).

Após os passos acima, abra o menu de configurações clique em mover e em seguida nos objetos sobressalentes ao retângulo de prata, irá abrir o menu de configurações deste objeto e com este menu se desativa a opção exibir objeto para que o objeto não apareça na tela e no menu de navegação do console clique em exibir ou esconder eixos e exibir e esconder malha para ficar apenas com o retângulo de prata na área de trabalho do GeoGebra, conforme Figura 9.

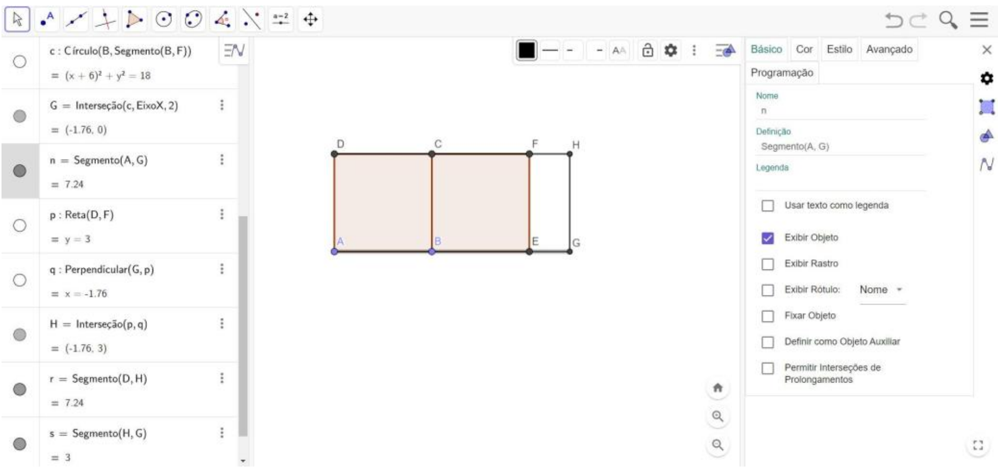

Figura 9. Retângulo de prata,passo 5. **Fonte:** Autores (2023).

4. Conclusão

Neste trabalho foram apresentados os números metálicos, uma classe de números que possuem muitas propriedades interessantes e uma relação natural com a geometria, como é o caso de seu membro mais conhecido, o número de ouro. Nos aprofundamos nos estudos de dois de seus integrantes, os números de ouro e de prata explorando principalmente as suas características geométricas.

Sendo assim, apresentamos a construção com auxílio do GeoGebra dos retângulos de ouro e de prata, bem como apresentamos um passo a passo para a construção do retângulo de prata usando o GeoGebra. Acreditamos que esse foi o principal diferencial deste trabalho, e a partir disso observamos que há muito a ser estudado e explorado com relação aos números metálicos, como por exemplo, as características geométricas de seus demais membros.

Por mais que este trabalho tenha se aprofundado nos números de ouro e prata, sabemos que os números metálicos são uma classe infinita de números do qual se pode explorar as propriedades dos demais membros, como por exemplo do número de bronze, que é um dos interesses dos autores para futuros trabalhos

Agradecimentos: À FAPERO – Fundação Rondônia de Amparo ao Desenvolvimento das Ações Científicas e Tecnológicas e à Pesquisa do Estado de Rondônia.

Conflitos de interesse: Os autores declaram não haver conflito de interesses.

Referência bibliográfica

ARAÚJO, J. J. V. As frações contínuas e os números metálicos; 2015

AVILA, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, n°6, p. 9-14, 1985.

BIEMBENGUT, M. S. Número de ouro e secção áurea: considerações e suges- tões para a sala de aula. Revista do professor de matemática, v. 43, p. 53, 2000.

DE OLIVEIRA, J. L. O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell. PMO v.10, n.2, 2022.

DE SPINADEL, V. W. La familia de números metálicos. Cuadernos del CIM- BAGE, n. 6, p. 17-44, 2003.

HUBER, A. V. Números metálicos. Dissertação (mestrado em matemática- PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria-RS, p.65, 2019.

RAMOS, M. G. O. A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. 2013.

WAGNER, E. Uma introdução às construções geométricas. Rio de Janeiro: OB- MEP, 2009.