

Artigo

Uma introdução aos números metálicos

A metallic numbers introduction

Valder Cezar Izato^{1*}, Marcio Costa Araújo Filho²

¹ Universidade Federal de Rondônia/ Departamento de Matemática e Estatística - Ji-Paraná

² Universidade Federal de Rondônia/ Departamento de Matemática e Estatística - Ji-Paraná – ORCID:
<https://orcid.org/0000-0001-5344-0892>

* Correspondência: cezarizato@gmail.com

Citação: Izato, V. C.; Araújo Filho, M.
C. Uma introdução aos números metálicos.
RBCA 2024, 13, 3. p.179-195.

Editor de Seção: Dra. Karen Janones da
Rocha

Recebido: 11/07/2024

Aceito: 17/08/2024

Publicado: 02/09/2024

Nota do editor: A RBCA permanece neutra em relação às reivindicações jurídicas em sites publicados e afilições institucionais.



Copyright: © 2024 pelos autores. Enviado para possível publicação em acesso aberto sob os termos e condições da licença Creative Commons Attribution (CC BY) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Abstract: In this paper we approach the metallic numbers and their relations with numerical sequences, in fact, from a particular case of a generalization of the Fibonacci sequence, we introduce the metallic numbers and develop several of their properties. The initial motivations were to study the Golden Number and its relationship with the Fibonacci sequence. In order to achieve the results, bibliographic surveys and the deductive method, commonly used in mathematical studies, were carried out. The work ends with the sequence of generalized Fibonacci sequences with sequences of continuous modalities. It is noteworthy that the differential of this work was to prove the convergence of sequences of ratios between consecutive terms of a class of generalized Fibonacci sequences for some metallic number.

Keywords: Gold number; Metallic numbers; Generalized Fibonacci Sequence.

Resumo: Neste trabalho, abordamos os números metálicos e suas relações com sequências numéricas, na verdade, a partir de um caso particular de uma generalização da sequência de Fibonacci, introduziremos os números metálicos e desenvolveremos diversas de suas propriedades. As motivações iniciais foram estudar o Número de Ouro e sua relação com a sequência de Fibonacci. Para que os resultados fossem alcançados, foram realizados levantamentos bibliográficos e utilizado o método dedutivo, comumente empregados em estudos matemáticos. O trabalho é concluído com a correlação das sequências de Fibonacci generalizadas com as sequências de radicais contínuos. É importante ressaltar que o diferencial desse trabalho foi provar a convergência das sequências de razões entre termos consecutivos de uma classe das sequências de Fibonacci generalizadas para algum número metálico.

Palavras-chave: Número de Ouro; Números metálicos; Sequência de Fibonacci generalizada.

1. Introdução

O presente artigo é resultado de um estudo bibliográfico realizado a partir do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), no qual o primeiro autor é Bolsista e aceitou participar do mesmo com a finalidade de desenvolver o pensamento crítico e científico no decurso da sua formação acadêmica, motivado por seu interesse pessoal na Matemática.

Aqueles que têm afinidade com a Matemática certamente já estudaram ou se interessaram pelas características e propriedades do Número de Ouro, também conhecido

como Razão Áurea ou, para adeptos do pensamento platônico, Proporção Divina, número que provoca fascínio a todos que o exploram. Todavia, o Número de Ouro não é o único a apresentar características e propriedades singulares. Em razão de ter recebido um nome de metal, serviu de inspiração para a nomenclatura de outros números, chamados números metálicos, o que faz deste um estudo interessante. Sendo assim, o principal objetivo deste trabalho é investigar os números metálicos e suas relações com diversos temas da matemática, incluindo as sequências de números reais e de radicais contínuos.

A respeito do Número de Ouro, sabe-se da sua relação com a sequência de Fibonacci.

Essa célebre sequência pode ser vista através da relação de recorrência $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$, com as condições iniciais $f_1 = f_2 = 1$, de onde obtêm-se:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \dots)$$

chamada de sequência de Fibonacci, com lei de formação $f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, conforme veremos no decorrer do trabalho.

Seja $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência das razões entre os termos consecutivos da sequência de Fibonacci, ou seja, $G_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, com $n \in \mathbb{N}$, da qual obtêm-se:

$$G_1 = \frac{1}{1} = 1; G_2 = \frac{2}{1} = 2; G_3 = \frac{3}{2} = 1,5; G_4 = \frac{5}{3} = 1,666 \dots; G_5 = \frac{8}{5} = 1,6;$$

$$G_6 = \frac{13}{8} = 1,625; G_7 = \frac{21}{13} = 1,6155384 \dots; G_8 = \frac{34}{21} = 1,619047 \dots;$$

$$G_9 = \frac{55}{34} = 1,617664 \dots; G_{10} = \frac{89}{55} = 1,618181 \dots$$

Continuando com esse processo, é possível perceber que quanto mais divisões são realizadas, obtém-se um valor cada vez mais próximo de $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803399 \dots$ chamado de Número de Ouro. Para mais curiosidades a cerca do Número de Ouro o leitor pode consultar HUBER (2019) e TEODORO (2018). Entretanto, não é condição suficiente para concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$$

Ou seja, a sequência $(G_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \dots)$ com lei de formação $G_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ com $n \in \mathbb{N}$, possui como limite o Número de Ouro. Mas, é possível provar que essa sequência é limitada por 1 e 2, e que as subsequências dadas pelos termos de ordem ímpar $(G_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ e de ordem par $(G_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ são duas subsequências monótonas e limitadas que convergem para o mesmo limite, garantindo assim a convergência de $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Provar que as subsequências dadas pelos termos de ordem ímpar e de ordem par, citadas acima, são duas subsequências monótonas e limitadas que convergem para o mesmo limite é um dos objetivos do presente trabalho e será alcançado como aplicação do resultado apresentado na Seção 3.1.4.

Semelhante ideia será aplicada aos números metálicos, que são definidos como as soluções positivas da equação quadrática:

$$x^2 - px - q = 0, \quad p, q \in \mathbb{N}$$

Por sua vez, os números metálicos tem relação com a sequência de Fibonacci generalizada, vista através da recorrência $g_{n+2} - pg_{n+1} - qg_n = 0$, com $g_1 = q$ e $g_2 = p$. Todavia, o objeto de interesse dessa pesquisa será o caso em que $q = 1$, ou seja, das recorrências $g_{n+2} - pg_{n+1} - g_n = 0$ com $g_1 = 1$ e $g_2 = p$. Sendo assim, para cada $p \in \mathbb{N}$, obtêm-se uma sequência de números dada por uma lei de formação cuja as razões entre os termos consecutivos convergem para um número metálico. Vale ressaltar que o diferencial desse trabalho foi justamente provar essa convergência. Além disso, destacamos que essas sequências numéricas possuem propriedades como:

$$g_{n-1}g_{n+1} = g_n^2 + (-1)^n \text{ e } g_{n+m} = g_n g_{m+1} + g_{n-1} g_m,$$

que serão demonstradas no decorrer do trabalho.

O presente artigo se inicia com um levantamento teórico acerca de sequências numéricas e de relações de recorrências na seção 3.1, que é importante para a compreensão do restante do trabalho. Posteriormente, na seção 3.1.3, são apresentados/definidos os números metálicos, assim como algumas proposições válidas para o caso de interesse. Por fim, na seção 3.1.4, demonstra-se que as sequências de Fibonacci generalizadas convergem para algum número metálico que, por sua vez, pode ser representado por uma sequência de radicais contínuos.

2. Materiais e Métodos

A presente pesquisa é de cunho bibliográfico, uma vez que foi realizado um levantamento de informações a cerca do assunto em livros, monografias e, principalmente, em artigos científicos, para compreender e explorar o objeto de estudo. Por sua vez, a pesquisa bibliográfica

[...] é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos, onde a principal vantagem reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. (GIL, 2008, p.50).

Para Manzo (1973, p.32), a bibliografia pertinente “oferece meios para definir, resolver, não somente problemas já conhecidos, como também explorar novas áreas onde os problemas não se cristalizaram suficientemente”.

Ademais, para alcançar novos resultados, utilizamos o método lógico dedutivo e o método indutivo. Segundo Gil (2008), o método dedutivo parte do geral e, a seguir, desce ao particular, encontrando larga aplicação em ciências como a Matemática, cujos princípios podem ser enunciados como leis, como se procede nos estudos matemáticos desde a antiguidade. Por sua vez, o método indutivo procede inversamente ao dedutivo: parte do particular e coloca a generalização como um produto posterior do trabalho de coleta de dados particulares, como foi realizado em algumas das demonstrações presente nesse trabalho.

Além disso, foram realizados encontros presenciais na Universidade, onde foi discutido no quadro o desenvolvimento das contas e as descobertas das relações obtidas referentes ao projeto “Números Metálicos” do PIBIC da UNIR ciclo 2022-2023.

3. Resultados e Discussão

3.1 Preliminares: sequências de números reais e recorrência

Nessa seção são apresentados os conceitos e propriedades de sequências de números reais e das relações de recorrência, ambos serão utilizados para apresentar e descrever os números metálicos aqui estudados.

3.1.1 Sequências de números reais

Essa seção se inicia com o conceito de sequências numéricas ao qual estará intimamente relacionado aos números metálicos, uma vez que tais números podem ser obtidos como limite de uma classe de sequências numéricas, para essa seção teremos como principal referência a obra de LIMA (2002).

Definição 1. Uma sequência numérica ou sequência de números reais é uma função $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real a_n denominado n -ésimo termo.

Em geral, representa-se uma sequência como $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$ ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (a_n) , para indicar a sequência cujo n -ésimo termo é a_n . Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1. A sequência $(2, 2, \dots, 2, \dots)$ não é o mesmo que o conjunto $\{2\}$. Além disso, as sequências $(0, 7, 0, 7, \dots)$ e $(0, 0, 7, 0, 0, 7, \dots)$ são diferentes mas o conjunto dos seus termos é o mesmo, igual a $\{0, 7\}$.

Na maioria dos casos, as sequências de números reais podem ser descritas com a utilização de uma fórmula matemática que associa cada termo com sua posição, associando o termo de ordem n ao seu valor a_n correspondente, como é o caso das conhecidas progressões aritméticas e geométricas. Veja alguns exemplos.

Exemplo 2. Os números naturais pares $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ formam uma sequência que é uma progressão aritmética, cuja a razão é 2 e o n -ésimo termo é dado por $a_n = 2n$.

Exemplo 3. Os números que são potências inteiras de 2 formam a sequência $2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ que é uma progressão geométrica cuja a razão é 2 e o n -ésimo termo é $a_n = 2^n$.

Nesses dois exemplos, por se tratar de uma PA e PG, no qual existe uma relação entre os termos da sequência, cada termo da PA pode ser determinado pela expressão $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Por sua vez, cada termo da PG pode ser determinado pela expressão $a_n = a_1 q^{n-1}$. No entanto, em muitas outras sequências não é possível obter uma expressão que possa determinar os termos da sequência, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 4. Os números primos $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$ formam uma sequência com uma quantidade infinita de termos, no qual cada termo da sequência não tem nenhuma relação com os termos antecessores ou sucessores. Desse modo, não há expressão para o n -ésimo termo.

A seguir será apresentada a noção de limite de uma sequência e suas características próprias. Definições importantes para o estudo dos números metálicos que, de uma forma ou de outra, reduzir-se-ão a algum tipo de função.

Definição 2. Uma sequência x_n diz-se limitada superiormente (respectivamente inferiormente) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a sequência (x_n) é limitada quando ela é limitada superior e inferiormente, ou seja, que existe um número real $k > 0$ tal quando $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5. Se $a > 1$ então a sequência $(a, a^2, \dots, a^n, \dots)$ é limitada inferiormente, porém não superiormente. Com efeito, multiplicando ambos os membros da desigualdade $1 < a$ por a^n obtemos $a^n < a^{n+1}$. Segue-se que $a < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a_n é limitada inferiormente por a . Por outro lado, desde que $1 < a$, temos $a = 1 + d$, com $d > 0$. A desigualdade de Bernoulli afirma que para todo natural $n > 1$ vale $a^n = (1 + d)^n \geq 1 + nd$. Desse modo, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$ podemos tomar $n > \frac{c-1}{d}$ e obter $1 + nd > c$, ou seja, $a^n > c$, ou seja, a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente.

Definição 3. Seja a sequência $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma subsequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $N' = n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ de $\mathbb{N}$. Para indicar a subsequência $x' = x|_{N'}$, denota-se por $x' = (x_n)_{n \in N'}$ ou $= (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}'}$, essa última notação mostra como uma subsequência pode ser considerada como uma sequência, ou seja, uma função cujo o domínio é $\mathbb{N}$.

Exemplo 6. Dada a sequência $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ com lei de formação $x = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, ao se restringir a função x ao subconjunto infinito $N' = 2n, n \in \mathbb{N}$ (naturais pares), obtém-se $x' = (3, 7, 11, 15, \dots)$, que é uma subsequência de x .

A seguir, será apresentado um dos conceitos mais importantes da análise matemática, o conceito de limite.

Definição 4. O número real a é limite da sequência x_n quando, para qualquer número real $\varepsilon > 0$, escolhido arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ satisfazem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$, ou seja, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Escreve-se então $\lim(x_n) = a$.

Esta definição significa que, para valores grandes de n , os termos x_n se aproximam de a o quanto se queira. Isso significa, que ao estipular uma margem de erro $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que os infinitos termos x_n da sequência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de a com erro menor do que ε .

Desse modo, $\lim(x_n) = a$ significa afirmar que qualquer intervalo aberto de centro a contém todos os termos x_n da sequência, salvo para um número finito de índices n escolhido em função do raio ε do intervalo dado.

Definição 5. Uma sequência x_n chama-se monótona quando existe $x_n \leq x_{n+1}$ ou $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

No primeiro caso, chama-se (x_n) de monótona não-decrescente e, no segundo, (x_n) de monótona não-crescente. Assim, se $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, diz-se que a sequência é crescente. Diz-se decrescente quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Toda sequência monótona não-decrescente é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo. Já toda sequência monótona não-crescente é limitada superiormente pelo seu primeiro termo. Para que ela seja limitada é suficiente que possua uma subsequência limitada. De fato, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ uma subsequência limitada da sequência monótona não-

decrecente (x_n) , temos que $x_{n'} \leq c$ para todo $n' \in N'$. Dado qualquer $n \in N$, existe $n' \in N'$ tal que $n < n'$. Então, $x_n \leq x_{n'} \leq c$. O teorema a seguir dá uma condição suficiente para que uma sequência convirja.

Teorema 1. (Propriedades das sequências de números reais). Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais, as seguintes afirmações são válidas:

- i) Se a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, então ela é limitada;
- ii) Se a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona e limitada, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente;
- iii) Se a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.

Veja a seguir alguns exemplos.

Exemplo 7. A sequência $2, 0, 2, 0, 2, \dots$, cujo n -ésimo termo é $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$, é limitada mas não é convergente porque possui duas subsequências constantes, $x_{2n-1} = 2$ e $x_{2n} = 0$, com limites distintos.

Exemplo 8. A sequência $1, 2, 3, 4, \dots$, com $x_n = n$, só é limitada inferiormente porém não superiormente. Portanto, não converge porque não é limitada.

3.1.2 Relações de Recorrência

De forma geral, uma recorrência pode ser vista como uma expressão que dá um valor de uma função num dado "ponto" em termos dos valores da mesma função em "pontos anteriores". Por exemplo,

$$F(n) = F(n-1) + 3n + 2$$

é uma recorrência que dá o valor de $F(n)$ em termos de $F(n-1)$.

Definição 6. Uma recorrência é uma relação entre os termos sucessivos de uma sequência. Desse modo, usando uma fórmula de recorrência, podemos obter o próximo termo da sequência usando os valores dos termos anteriores.

Exemplo 9. As progressões aritméticas e as progressões geométricas são exemplos de recorrência. As progressões aritméticas podem ser definidas por $a_n = a_{n-1} + r$, em que r é a razão e a_1 o primeiro termo. Já as progressões geométricas são definidas por $a_n = (a_{n-1})q$, de razão q e primeiro termo a_1 .

Definição 7. É chamada de recorrência homogênea a relação na qual cada termo depende somente dos termos anteriores. Contudo, se a relação de recorrência também depender de um termo independente da sequência, ela é chamada de recorrência não-homogênea.

Definição 8. Chama-se relação de recorrência linear quando a relação que associa cada termo aos termos anteriores é linear.

Definição 9. A relação de recorrência é de primeira ordem quando cada termo é obtido a partir do seu antecessor imediato, ou seja,

$$a_{n+1} + f(n)a_n = g(n)$$

em que $f(n)$ e $g(n)$ são funções e $n \in \mathbb{N}$. Se $f(n)=0$ a relação não é uma recorrência, portanto, $f(n) \neq 0$.

Definição 10. A relação de recorrência é de segunda ordem quando cada termo da sequência é obtido pela relação entre os dois termos antecessores imediatos. Uma recorrência linear de segunda ordem é do tipo:

$$a_{n+2} + f(n)a_{n+1} + g(n)a_n = h(n)$$

em que $f(n)$, $g(n)$ e $h(n)$ são funções, dada a condição de $g(n) \neq 0$ e $h(n) = 0$ para que a recorrência seja de segunda ordem e homogênea, respectivamente.

Então, quando $f(n)$ e $g(n)$ forem constantes, ou seja, $f(n) = p$ e $g(n) = q$ ($q \neq 0$) e com $h(n) = 0$, a relação de recorrência linear de segunda ordem pode ser escrita genericamente como:

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

Exemplo 10. A sequência de Fibonacci é uma recorrência linear de segunda ordem do tipo $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$.

Definição 11. A cada relação de recorrência da forma $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ pode ser associada a uma equação quadrática $r^2 + pr + q = 0$, denominada de equação característica.

Exemplo 11. A sequência de Fibonacci do tipo $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ possui $r^2 - r - 1 = 0$ como equação característica.

Resolver a recorrência é encontrar uma expressão que nos permite conhecer qualquer termo a_n da recorrência em termos apenas de n . Vejamos o teorema que relaciona as raízes da equação característica com a solução da recorrência.

Teorema 2. Se r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$, então $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, com c_1 e c_2 constantes.

Exemplo 12. A relação de recorrência $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ possui equação característica $r^2 + 3r + 2 = 0$. As raízes são -2 e -1. Então, de acordo com o Teorema 2, todas as sequências da forma $a_n = c_1(-2)^n + c_2(-1)^n$, onde c_1 e c_2 são constantes, são soluções dessa recorrência. Porém fica o questionamento que se dadas as raízes da equação característica podemos obter dessa forma todas as soluções da recorrência. Veremos que sim no teorema a seguir.

Teorema 3. Se r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$ e $r_1, r_2 \neq 0$, são raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, então todas as soluções da relação de recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ são da forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ com c_1 e c_2 constantes.

Para a demonstração dos Teoremas 2 e 3, consultar HUBER (2019).

Como exemplo de aplicação desse teorema, será obtida a solução geral da relação de recorrência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci possui o numeral 1 como o primeiro e o segundo termo, e os elementos seguintes são originados pela soma de seus dois antecessores, ou seja,

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ isto é } f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$$

no qual tomam-se como condições iniciais $f_1 = f_2 = 1$, pois são os dois primeiros termos da sequência. Assim, a equação característica é $r^2 - r - 1$, tendo como raízes $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por consequência, as soluções são da forma $f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, no qual obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se

$$c_1 = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]} = \frac{-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)[- \sqrt{5}]} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

e

$$c_2 = \frac{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]} = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)[- \sqrt{5}]} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Logo, obtém-se os coeficientes $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Portanto, a solução geral da relação da recorrência $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$, tendo $f_1 = f_2 = 1$ como condições iniciais é:

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

que é chamada de fórmula de Binet. Essa solução permite encontrar o valor de qualquer termo conforme a posição que ele ocupe na sequência.

Exemplo 13. Encontrar o valor do décimo segundo termo da sequência de Fibonacci. Pretende-se calcular f_{12} , pelo exposto acima, tem-se:

$$\begin{aligned} f_{12} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{12} - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{12} = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\frac{(1+\sqrt{5})^{12}}{2^{12}} - \frac{(1-\sqrt{5})^{12}}{2^{12}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\frac{659456 + 12\sqrt{5} + 294900\sqrt{5} - (659456 - 12\sqrt{5} - 294900\sqrt{5})}{2^{12}} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \left\lfloor \frac{147456\sqrt{5}}{1024} \right\rfloor}{5} = \frac{737280}{5120} = 144$$

Ou seja, 144 é o décimo segundo termo da sequência de Fibonacci. Por consequência, listando os termos dessa sequência, com $n \in \mathbb{N}$, obtemos a sequência de números

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots)$$

chamada de sequência de Fibonacci.

Definição 12. Diz-se sequência de Fibonacci generalizada (SFG) as sequências em que cada elemento é uma combinação linear dos dois antecessores, isto é,

$$g_{n+2} - pg_{n+1} - qg_n = 0$$

com $p, q \in \mathbb{N}$ com $g_1 = q$ e $g_2 = p$

Vale observar que a nomenclatura que adotamos acima foi usada por outros autores para uma classe semelhante de sequências de números reais, conforme podemos ver em HUBER (2019) e SPINADEL (2003). Essa nomenclatura é justificada, uma vez que para $p = q = 1$ a sequência se torna a célebre sequência de Fibonacci.

Exemplo 14. Seja a sequência de Fibonacci generalizada com $p = 2$ e $q = 1$, ou seja, $g_{n+2} - 2g_{n+1} - g_n = 0$ e com condições iniciais $g_1 = 1$ e $g_2 = 2$. Assim tem-se a equação característica $r^2 - 2r - 1 = 0$ cujas raízes são $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$. Logo, as soluções são da forma $g_n = c_1(1 + \sqrt{2})^n - c_2(1 - \sqrt{2})^n$. Do Sistema:

$$\begin{cases} c_1(1 + \sqrt{2}) + c_2(1 - \sqrt{2}) = 1 \\ c_1(1 + \sqrt{2})^2 + c_2(1 - \sqrt{2})^2 = 2 \end{cases}$$

obtem-se os coeficientes $c_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ e $c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Então:

$$g_n = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{2})^n$$

é solução da da recorrência $g_{n+2} - 2g_{n+1} - g_n = 0$ com condições iniciais $g_1 = 1$ e $g_2 = 2$. Listando os termos dessa sequência, com $n \in \mathbb{N}$, obtem-se a sequência de números

$$(1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots)$$

chamada sequência de Pell, para mais detalhes ver [2].

3.1.3 Números metálicos

Nesta seção, será apresentada a definição dos números metálicos, e pretende-se aprofundar particularmente o estudo para o caso $q = 1$. Para isso, tem-se como principal referência a obra de OLIVEIRA (2022).

Definição 13. Chamam-se de números metálicos às soluções positivas da equação $x^2 - px - q = 0$ para $p, q \in \mathbb{N}$.

Pela definição acima, podem-se determinar os números metálicos resolvendo uma equação quadrática, e para um par $(p, q) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ o número metálico associado é único, vejamos:

i) Usando o método de completar quadrado temos:

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2px}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \\ \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q &= 0 \Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + 4q}{4} \Rightarrow x - \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{4}} \\ x &= \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{4}} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \end{aligned}$$

uma vez que $p^2 + 4q > 0$. Logo, as raízes da equação são $\frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ e $\frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$

ii) Para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$ a equação $x^2 - px - q = 0$ tem uma única solução positiva dada por $x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$

Com efeito, como $p, q \in \mathbb{N}$, vemos que $p^2 + 4q > p^2$ e consequentemente $\sqrt{p^2 + 4q} > p$. Dessa forma, existe um número real positivo $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\sqrt{p^2 + 4q} = p + k$. Logo,

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} = \frac{p - (p + k)}{2} = -\frac{k}{2} < 0, \text{ pois } k \in \mathbb{R}^+$$

Portanto, conclui-se que a raiz $x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} < 0$, e como consequência, $x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} > 0$ é a única raiz positiva para todo $p, q \in \mathbb{N}$, a qual é o único número metálico associado à equação $x^2 - px - q = 0$ e que denotaremos por $\sigma_{p,q}$.

Como dito anteriormente, será considerado aqui apenas o caso em que $q = 1$, ou seja, os números metálicos da forma $\sigma_{p,1} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$, no qual denota-se, para simplificar a notação, por $\sigma_{p,1}$.

Proposição 1. Sejam $p \in \mathbb{N}$ e $q = 1$, então $p^2 + 4$ não é um número quadrado perfeito.

Demonstração. De fato, observe inicialmente que $p^2 + 4q$ é quadrado perfeito se e somente se $q = n(n + p)$ com $n, p \in \mathbb{N}$, uma vez que

$$p^2 + 4q = p^2 + 4n(n + p) = p^2 + 4n^2 + 4np = (p + 2n)^2$$

Entretanto, a condição $q = n(n + p)$ com $n, p \in \mathbb{N}$, não tem solução para $q = 1$.

Lema 1. (Princípio da Boa Ordenação). Todo subconjunto não vazio dos naturais possui um elemento mínimo.

Proposição 2. Todo número metálico $\sigma_{p,1}$ é irracional quadrático.

Demonstração. Sabe-se que $p^2 + 4$ não é um quadrado perfeito, e por contradição, suponha

que $\sqrt{p^2 + 4}$ é racional. Sendo assim, considere o seguinte conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x\sqrt{p^2 + 4} \in \mathbb{N}\}.$$

Note que B é não vazio, uma vez que $\sqrt{p^2 + 4}$ é racional e existem $r, s \in \mathbb{N}$ com $s \neq 0$ tais que $\sqrt{p^2 + 4} = \frac{r}{s}$ então $s\sqrt{p^2 + 4} = r \in \mathbb{N}$, isto é, $s \in B$.

Pelo Princípio da Boa Ordenação, ver Lema 1, B possui um elemento mínimo, que será denotado por x_m . Considere o seguinte número,

$$x_{(m-1)} = x_m\sqrt{p^2 + 4} - \lfloor \sqrt{p^2 + 4} \rfloor = x_m(\sqrt{p^2 + 4} - \lfloor \sqrt{p^2 + 4} \rfloor)$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor do que $x \in \mathbb{R}$. Observe que,

$$0 < \sqrt{p^2 + 4} - \lfloor \sqrt{p^2 + 4} \rfloor < 1,$$

Sendo assim, $x_{(m-1)} < x_m$. Além disso, note que:

$$x_{(m-1)}\sqrt{p^2 + 4} = (x_m\sqrt{p^2 + 4} - x_m\sqrt{p^2 + 4} - \lfloor \sqrt{p^2 + 4} \rfloor)\sqrt{p^2 + 4}$$

$$x_{(m-1)}\sqrt{p^2 + 4} = x_m(p^2 + 4) - (x_m\sqrt{p^2 + 4}) \lfloor \sqrt{p^2 + 4} \rfloor$$

com $x_m(p^2 + 4) \in \mathbb{N}$ e $x_m\sqrt{p^2 + 4} \in \mathbb{N}$ (já que $x_m \in B$), assim como $x_m\sqrt{p^2 + 4}) \lfloor \sqrt{p^2 + 4} \rfloor$.

Como $p^2 + 4 > \sqrt{p^2 + 4}) \lfloor \sqrt{p^2 + 4} \rfloor$, pode-se concluir que $x_m(p^2 + 4) > x_m\sqrt{p^2 + 4}) \lfloor \sqrt{p^2 + 4} \rfloor$;

$x_{(m-1)}\sqrt{p^2 + 4} \in \mathbb{N}$, por consequência, $x_{(m-1)} \in B$. O que é um absurdo, pois contraria a minimalidade de $x_m \in B$, já que $x_{(m-1)} < x_m$. Portanto, $\sqrt{p^2 + 4}$ é irracional assim como todos números metálicos $\sigma_{p,1}$.

3.1.4 Sequência de Fibonacci generalizada e as sequências de radicais contínuos

Dada uma sequência de Fibonacci generalizada $g_{n+2} - pg_{n+1} - qg_n = 0$,

com $p, q \in \mathbb{N}$, e assumindo $q = 1$, conforme Definição 12, tem-se

$$g_{n+2} = pg_{n+1} + g_n$$

Proposição 3. Dados três termos consecutivos da sequência de Fibonacci generalizada g_{n-1} , g_n e g_{n+1} para todo natural $n \geq 2$, vale a seguinte relação:

$$g_{n-1}g_{n+1} = g_n^2 + (-1)^n$$

Demonstração. Por indução em $n = 2$, como $g_1 = 1$ e $g_2 = p$, tem-se

$$g_1g_3 = 1(p^2 + 1) = p^2 + 1 = g_2^2 + (-1)^2,$$

então a igualdade é verdadeira para $n = 2$.

Partindo da hipótese de que a igualdade $g_{k-1}g_{k+1} = g_k^2 + (-1)^k$ seja válida para algum $k > 2$, mostraremos que ela é válida para $k + 1$, isto é,

$$g_kg_{k+2} = g_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$$

Da Equação (1) vale a relação $g_{k+2} = pg_{k+1} + g_k$, assim

$$g_kg_{k+2} = g_k(pg_{k+1} + g_k) = pg_kg_{k+1} + g_k^2$$

Novamente da Equação (1) sabe-se que $pg_k + g_{k+1} - g_{k-1}$ e substituindo em (3) obtêm-se

$$\begin{aligned} g_kg_{k+2} &= g_{k+1}(g_{k+1} - g_{k-1}) + g_k^2 \\ &= g_{k+1}^2 - g_{k+1}g_{k-1} + g_k^2 \end{aligned}$$

e pela hipótese de indução segue que:

$$g_kg_{k+2} = g_{k+1}^2 - g_k^2 - (-1)^k + g_k^2 = g_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$$

que é o que se queria mostrar.

Proposição 4. Os termos g_n e g_m da sequência de Fibonacci generalizada satisfazem a relação:

$$g_{n+m} = g_ng_{m+1} + g_{n-1}g_m$$

para quaisquer naturais $n, m \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$.

Demonstração. A prova será por indução em m . Para $m = 1$ tem-se

$$g_{n+1} = pg_n + g_{n-1} = g_ng_2 + g_{n-1}g_1$$

então a igualdade é verdadeira para $m = 1$. Partindo da hipótese de que a igualdade seja válida para $m = 2, \dots, k$, isto é, $g_{n+m} = g_ng_{m+1} + g_{n-1}g_m$ seja válida para todo $m = 2, \dots, k$, será mostrado que ela é válida para $m = k + 1$, ou seja,

$$g_{n+(k+1)} = g_n g_{(k+1)+1} + g_{n-1} g_{k+1}$$

De fato,

$$\begin{aligned} g_{n+(k+1)} &= p g_{n+k} + g_{n+(k-1)} = p(g_n g_{k+1} + g_{n-1} g_k) + (g_n g_k + g_{n-1} g_{k-1}) \\ &= g_n(p g_{k+1} + g_k) + g_{n-1}(p g_k + g_{k-1}) = g_n g_{k+2} + g_{n-1} g_{k+1} \\ &= g_n g_{(k+1)+1} + g_{n-1} g_{k+1} \end{aligned}$$

que é o que se queria mostrar.

Proposição 5. Para todo natural $n \in \mathbb{N}$, os termos g_n da sequência de Fibonacci generalizada satisfazem a seguintes relações:

$$a) \quad g_{2n-1} = g_n^2 + g_{n-1}^2;$$

$$b) \quad g_{2n} = \frac{g_{n+1}^2 - g_{n-1}^2}{p}$$

Demonstração. Pela Proposição 4, pode-se ver que:

$$g_{2n-1} = g_{n+(n-1)} = g_n g_n + g_{n-1} g_{n-1} = g_n^2 + g_{n-1}^2$$

ou seja, a relação a) é válida. Analogamente, veja que:

$$g_{2n} = g_{n+m} = g_n g_{n+1} + g_{n-1} g_n$$

Como $g_{n+1} = p g_n + g_{n-1} \Rightarrow g_n = \frac{g_{n+1} - g_{n-1}}{p}$. Então,

$$g_{2n} = \frac{g_{n+1}(g_{n+1} - g_{n-1})}{p} + \frac{g_{n-1}(g_{n+1} - g_{n-1})}{p} = \frac{g_{n+1}^2 - g_{n-1}^2}{p}$$

Pretende-se verificar agora que a sequência formada pela razão de termos consecutivos da sequência generalizada de Fibonacci converge para um número metálico. Para isso, seja $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência formada pela razão de termos consecutivos da sequência de Fibonacci generalizada, conforme Equação (1), ou seja, a sequência de termo geral dado por $r_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$.

No que segue, para a sequência $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, será mostrado que as seguintes relações são verdadeiras:

- i) $r_{2n-1} < r_{2n};$
- ii) $r_{2n-1} < r_{2n+1};$
- iii) $r_{2n} > r_{2n+2}$

Com efeito, veja inicialmente que

$$r_{2n} - r_{2n-1} = \frac{g_{2n+1}}{g_{2n}} - \frac{g_{2n}}{g_{2n-1}} = \frac{g_{2n+1}g_{2n-1} - g_{2n}^2}{g_{2n}g_{2n-1}} = \frac{1}{g_{2n}g_{2n-1}} > 0$$

ou seja, o item i) é válido. Além disso, para o item ii), basta observar que:

$$\begin{aligned} r_{2n} - r_{2n-1} &= \frac{g_{2n+2}}{g_{2n+1}} - \frac{g_{2n}}{g_{2n-1}} = \frac{g_{2n+2}g_{2n-1} - g_{2n}g_{2n+1}}{g_{2n+1}g_{2n-1}} = \\ &= \frac{(pg_{2n+1} + g_{2n})g_{2n-1} - g_{2n}(pg_{2n} + g_{2n-1})}{g_{2n+1}g_{2n-1}} = \\ &= \frac{pg_{2n+1}g_{2n-1} - pg_{2n}^2}{g_{2n+1}g_{2n-1}} = \frac{p}{g_{2n+1}g_{2n-1}} > 0 \end{aligned}$$

E analogamente, para o item iii), note que

$$\begin{aligned} r_{2n+2} - r_{2n} &= \frac{g_{2n+3}}{g_{2n+2}} - \frac{g_{2n+1}}{g_{2n}} = \frac{g_{2n+3}g_{2n} - g_{2n+1}g_{2n+2}}{g_{2n+2}g_{2n}} = \\ &= \frac{(pg_{2n+2} + g_{2n+1})g_{2n} - g_{2n+2}(pg_{2n} + g_{2n-1})}{g_{2n+2}g_{2n}} = \frac{g_{2n}g_{2n+1} - g_{2n+2}g_{2n-1}}{g_{2n+2}g_{2n}} \\ &= \frac{pg_{2n}^2 - pg_{2n-1}g_{2n+1}}{g_{2n+2}g_{2n}} = \frac{-p}{g_{2n+2}g_{2n}} < 0 \end{aligned}$$

Vale destacar que a Proposição 3 foi aplicada nesses três casos.

Como $r_{2n-1} < r_{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que:

$$p = r_1 < r_3 < \dots < r_{2n-1} < r_{2n} < \dots < r_4 < r_2 = \frac{p^2 + 1}{p}$$

ou seja, tanto $(r_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ quanto $(r_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas e monótonas. Portanto, pelo Teorema 1, $(r_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(r_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ são convergentes. Será verificado a seguir que ambas convergem para o mesmo número, que é um número metálico.

Considere o número real L_1 tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n-1} = L_1$$

Uma vez que:

$$r_{2n-1} = \frac{g_{2n}}{g_{2n-1}} = \frac{pg_{2n-1} + g_{2n-2}}{g_{2n-1}} = p + \frac{g_{2n-2}}{g_{2n-1}} = p + \frac{1}{\frac{g_{2n-1}}{g_{2n-2}}} = p + \frac{1}{r_{2n-2}}$$

aplicando o limite para $n \rightarrow \infty$ tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n-1} = p + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_{2n-2}}$$

ou seja,

$$L_1 = p + \frac{1}{L_1} \Rightarrow L_1^2 - pL_1 - 1 = 0$$

consequentemente $L_1 = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$ é a única raiz real positiva dessa última equação.

Analogamente, $(r_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, isto é, existe um número real L_2 , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = L_2$$

Uma vez que

$$r_{2n} = \frac{g_{2n+1}}{g_{2n}} = \frac{pg_{2n} + g_{2n-1}}{g_{2n}} = p + \frac{g_{2n-1}}{g_{2n}} = p + \frac{1}{\frac{g_{2n}}{g_{2n-1}}} = p + \frac{1}{r_{2n-1}}$$

ou seja,

$$L_2 = p + \frac{1}{L_2} \Rightarrow L_2^2 - pL_2 - 1 = 0$$

consequentemente $L_2 = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$ é a única raiz real positiva dessa última equação. Uma vez que os limites existem e são iguais, conclui-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = \sigma_{p,1}$$

isto é, convergem para os números metálicos $\sigma_{p,1}$. Isso garante a convergência da sequência $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para o número metálico $\sigma_{p,1}$.

No que segue será apresentada a relação da sequência de Fibonacci generalizada, $g_{n+2} - pg_{n+1} - qg_n = 0$, com as sequências de radicais contínuos. Para isso, dado um número natural p , considere a sequência de números reais $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{pa_n + 1}, \text{ para todo } p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

deste modo $a_n > 0$ e seus quatro primeiros termos são:

$$a_1 = 1; a_2 = \sqrt{p+1}; a_3 = \sqrt{p\sqrt{p+1}+1}; a_4 = \sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p+1}+1}+1}$$

Considerando que o limite exista e que seja igual ao número positivo L , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

ao fazer n tender ao infinito na igualdade $a_{n+1} = \sqrt{pa_n + 1}$, obtem-se:

$$L = \sqrt{pL + 1} \Rightarrow L^2 - pL - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$$

Ou seja, $L = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$ é limite da sequência de termo geral $a_{n+1} = \sqrt{pa_n + 1}$. Assim, pode-se concluir que o limite dessa sequência são os números metálicos $\sigma_{p,1}$. Assim, os números metálicos $\sigma_{p,1}$ podem ser escritos como um radical contínuo da seguinte forma:

$$\sigma_{p,1} = \sqrt{1 + p \sqrt{1 + p \sqrt{1 + p \sqrt{1 + p \sqrt{\dots}}}}}$$

A seguir, mostra-se que realmente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente. Para isso, será provado que ela é uma sequência monótona e limitada, conforme Teorema 1.

Desde que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n > 0$ é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \sqrt{pa_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Será mostrado que:

$$\text{i)} \quad 1 < a_n \leq \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2};$$

$$\text{ii)} \quad a_n < a_{n+1}$$

Note que no item i) $a_2 = \sqrt{p + 1} < \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$. Supondo que $a_n < \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$, será provado que $a_{n+1} \leq \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$. De fato:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= pa_n + 1 \leq \frac{p^2 + p\sqrt{p^2 + 4}}{2} + 1 \Rightarrow a_{n+1}^2 \leq \frac{p^2 + p\sqrt{p^2 + 4} + 2}{2} \\ a_{n+1}^2 &\leq \frac{2p^2 + 2p\sqrt{p^2 + 4} + 4}{4} = \frac{p^2 + 2p\sqrt{p^2 + 4} + (p^2 + 4)}{4} = \left(\frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Então,

$$a_n \leq \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$$

ou seja, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona.

4. Considerações finais

Nesse trabalho foi visto inicialmente a relação do Número de Ouro com a sequência de Fibonacci. A partir do conceito do Número de Ouro, introduzimos os números metálicos e as sequências de Fibonacci generalizadas, no qual foi visto a relação entre esses dois conceitos, além de aprofundar e apresentar algumas propriedades dessas sequências mais gerais.

O trabalho por ter abordado as sequências de Fibonacci generalizadas para o caso $q = 1$, pode ser capaz ainda de lograr nossos questionamentos e influir novas pesquisas para casos mais gerais. Por fim, o estudo introdutório dos números metálicos permitiu envolver com diversos temas da matemática, como os números inteiros, racionais e irracionais, sequências, radicais contínuos, limites, etc, entendimentos necessários para que os resultados da pesquisa fossem alcançados.

Agradecimentos: À FAPERÓ – Fundação Rondônia de Amparo ao Desenvolvimento das Ações Científicas e Tecnológicas e à Pesquisa do Estado de Rondônia. O primeiro autor agradece a Universidade Federal de Rondônia pela oferta de bolsa PIBIC.

Conflitos de interesse: Os autores declaram não haver conflito de interesses.

Referência bibliográfica

- ÁVILA, G. (1985). Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, nº6, p. 9-14.
- OLIVEIRA, J. L. (2022). O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell. *PMO* v.10, n.2.
- SPINADEL, V. W. (2003). La familia de números metálicos. *Cuadernos del CIMBAGE*, n. 6, p. 17-44. [4]
- HUBER, A. V. Números metálicos. Dissertação (mestrado em matemática em rede nacional-PROFMAT) - Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria-RS, p.65, (2019).
- LIMA, E. L. (2002). *Análise Real*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 198p.
- TEODORO, M. P. (2018). Sobre a Sequência de Fibonacci. *Revista de Matemática*, v. 5, n. 1, p. 29-49.